ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN HIẾN

VỀ BÀI TOÁN ĐẢM BẢO CHI PHÍ ĐIỀU KHIỂN TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH MẠNG NƠ RON PHÂN THỨ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

---------------- ---------------

NGUYỄN VĂN HIẾN

VỀ BÀI TOÁN ĐẢM BẢO CHI PHÍ ĐIỀU KHIỂN TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH MẠNG NƠ RON PHÂN THỨ

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. MAI VIẾT THUẬN

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$	tập các số thực, số thực không âm tương ứng
$\mathbb{R}^n$	không gian vectơ Euclide thực $n-$chiều
$\mathbb{R}^{n\times r}$	không gian các ma trận thực cỡ $(n \times r)$
$C([a,b],\mathbb{R}^n)$	không gian các hàm liên tục trên $[a,b]$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
$A = (A)_{ij}$	phần tử A_{ij} của ma trận A
$\text{diag}\{l_1,\dots,l_n\}$	ma trận đường chéo chính
I	ma trận đơn vị
$A \geq 0$	A là một ma trận không âm
$A \geq B$	$A - B \geq 0$
$A > 0$	A là một ma trận dương
${}_{t_0}I_t^\alpha, I_t^\alpha$	toán tử tích phân phân thứ Riemann-Liouville cấp α
${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville cấp α
${}_{t_0}^{C}D_t^\alpha, D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Caputo cấp α
$\square$	kết thúc chứng minh của định lí hoặc bổ đề

Lời nói đầu

Mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân với đạo hàm bậc nguyên được nghiên cứu đầu tiên bởi L.O. Chua và L. Yang vào năm 1988 [5]. Mô hình này đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học trong những năm gần đây do những ứng dụng rộng lớn của nó trong xử lí tín hiệu, xử lí hình ảnh, tối ưu hóa và các lĩnh vực khác [2, 6, 17]. Năm 2008, trong một nghiên cứu của mình, A. Boroomand và M.B. Menhaj [2] lần đầu tiên mô hình hóa mạng nơ ron bởi hệ phương trình vi phân phân thứ (Caputo hoặc Riemann–Liouville). So với mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân với đạo hàm bậc nguyên, mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân phân thứ (Caputo hoặc Riemann–Liouville) có thể mô tả các đặc tính và tính chất của mạng nơ ron một cách chính xác hơn [2, 17]. Do đó hệ phương trình mạng nơ ron phân thứ đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học. Nhiều kết quả hay và thú vị về hệ phương trình mạng nơ ron phân thứ đã được công bố trong những năm gần đây (xem [17, 18, 25] và các tài liệu tham khảo trong đó).

Trong các ứng dụng thực tế, ta luôn cần phải xem xét dáng điệu của véc tơ trạng thái của hệ thống mô tả bởi hệ phương trình vi phân phân thứ trong một thời gian hữu hạn, khi đó các giá trị lớn của véc tơ trạng thái là không thể chấp nhận. M.P. Lazarević cùng các cộng sự [10, 11] là những tác giả đầu tiên nghiên cứu tính ổn định hữu hạn thời gian (FTS) cho hệ động lực mô tả bởi các hệ phương trình vi phân phân thứ. Khác với bài toán ổn định theo nghĩa Lyapunov, nghiên cứu dáng điệu của véc tơ trạng thái của hệ phương trình vi phân phân thứ trên một khoảng thời gian vô hạn, khái niệm ổn định hữu hạn thời gian nghiên cứu dáng điệu của véc tơ trạng thái trong một khoảng thời gian hữu hạn. Cụ thể hơn một hệ phương trình vi phân phân thứ được gọi là

FTS nếu khi ta đưa ra một giới hạn cho điều kiện ban đầu, véc tơ trạng thái của hệ không vượt ra khỏi ngưỡng đã giới hạn trong suốt khoảng thời gian đã cho. Bài toán nghiên cứu tính ổn định hữu hạn thời gian cho một số lớp hệ phương trình mạng nơ ron phân thứ đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học trong những năm gần đây [4, 7, 21, 22, 23, 24].

Mặt khác, trong các bài toán kỹ thuật, ngoài việc tìm cách thiết kế một bộ điều khiển làm cho hệ thống không những ổn định hữu hạn thời gian mà còn đảm bảo một mức độ đầy đủ về hiệu suất (guarantees an adequate level of performance). Bài toán này được gọi là bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của hệ động lực. Nội dung cơ bản của bài toán này là ngoài việc thiết kế một bộ điều khiển để đảm bảo cho hệ thống điều khiển là ổn định hữu hạn thời gian, ta còn phải dựa trên điều khiển đó tìm một cận trên của hàm mục tiêu (hàm chi phí) tương ứng. Đối với hệ phương trình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân với bậc nguyên đã có một vài công trình nghiên cứu về bài toán này (xem [9]). Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ phương trình mạng nơ ron phân thứ được nghiên cứu trong [18].

Luận văn tập trung nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho một số lớp hệ phương trình mạng nơ ron phân thứ. Luận văn gồm có 3 chương gồm những nội dung chính như sau:

Trong chương 1, chúng tôi trình bày một số khái niệm về giải tích phân thứ như tích phân và đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, tích phân và đạo hàm phân thứ Caputo. Sau đó, chúng tôi trình bày một số định lí tồn tại và duy nhất nghiệm. Cuối chương, chúng tôi trình bày một số bổ đề bổ trợ. Nội dung chính của chương này được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [8, 13, 14].

Trong chương 2 của luận văn, chúng tôi trình bày một số điều kiện đủ cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho hệ phương trình mạng nơ ron phân thứ bất định. Nội dung chính của chương này được tham khảo chủ yếu từ tài liệu [18].

Trong chương 3 của luận văn, chúng tôi nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho hệ phương trình mạng nơ ron chuyển mạch phân thứ. Đây chính là đóng góp mới của luận văn.

Để hoàn thành luận văn này, ngoài sự nỗ lực học hỏi của bản thân, em đã

nhận được rất nhiều sự quan tâm, giúp đỡ. Với tình cảm chân thành em xin gửi lời cảm ơn sâu sắc nhất tới TS. Mai Viết Thuận - người Thầy đã tận tình hướng dẫn, chỉ bảo, truyền đạt những kiến thức và kinh nghiệm quý báu cho em trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn.

Em xin gửi lời cảm ơn đến các thầy cô giáo của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, những người đã trực tiếp tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán K11 khóa 2017 - 2019, các phòng ban chức năng, Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho em trong thời gian học tập vừa qua.

Thái Nguyên, ngày 01 tháng 3 năm 2019

Tác giả luận văn

NGUYỄN VĂN HIẾN

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số kiến thức về giải tích phân thứ như tích phân Riemann-Liouville, đạo hàm phân thứ Caputo, đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville, mối liên hệ giữa hai loại đạo hàm Caputo và Riemann-Liouville. Ngoài ra, chúng tôi cũng trình bày phương pháp hàm Lyapunov cho hệ phương trình vi phân phân thứ. Các kiến thức được trình bày trong chương này được chúng tôi tham khảo trong [1, 13, 16].

1.1. Giải tích phân thứ

1.1.1. Tích phân phân thứ

Trong mục này, chúng tôi trình bày sơ lược về khái niệm tích phân phân thứ. Khái niệm tích phân phân thứ là một mở rộng tự nhiên của khái niệm tích phân lặp thông thường.

Định nghĩa 1.1. Cho $\alpha > 0$ và $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tích phân phân thứ Riemann-Liouville cấp α của hàm $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi:

$$_{t_0}I_t^{\alpha} x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, t \in (a, b],$$

trong đó $\Gamma(.)$ là hàm Gamma xác định bởi $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt, \alpha > 0.$

Trong Định nghĩa 1.1 khi $\alpha = 0$ chúng ta quy ước $_{t_0}I_t^{\alpha} := I$ với I là toán tử đồng nhất. Sự tồn tại của tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp α với $0 < \alpha < 1$ được cho bởi định lí sau:

Định lí 1.1. *Giả sử* $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *là một hàm khả tích trên* $[a, b]$*. Khi đó, tích phân* ${}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t)$ *tồn tại với hầu hết* $t \in [a, b]$*. Hơn nữa,* ${}_{t_0}I_t^{\alpha}x$ *cũng là một hàm khả tích.*

Ví dụ sau đây cho ta tích phân phân thứ của một số hàm cơ bản.

Ví dụ 1.1. (i) Cho $x(t) = (t-a)^{\beta}$, ở đây $\beta > -1$ và $t > a$. Với bất kì $\alpha > 0$, chúng ta có:

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}, t > a. $$

(ii) Cho $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda > 0$. Với bất kì $\alpha > 0$, chúng ta có:

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) = \lambda^{-\alpha}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+j+1)}, t > 0. $$

1.1.2. Đạo hàm phân thứ

Định nghĩa 1.2. Cho trước một số thực dương α và một khoảng $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp α của hàm $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi:

$$ {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t) := \frac{d^n}{dt^n}\left[{}_{t_0}I_t^{n-\alpha}x(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}x(s)ds, $$

trong đó $n = [\alpha] + 1$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α và $\frac{d^n}{dt^n}$ là đạo hàm thông thường cấp n.

Ví dụ 1.2. Cho hàm bước đơn vị (unit-step function):

$$ f(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad t \geq 0; \\ 0 & \text{nếu} \quad t < 0. \end{cases} $$

Bằng cách sử dụng Định nghĩa 1.2, ta tính đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp α của hàm $f(t)$ là:

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. $$

Trước khi trình bày điều kiện cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, chúng tôi nhắc lại một số kết quả sau:

Cho $[a,b]$ là một khoảng hữu hạn trong $\mathbb{R}$. $AC[a,b]$ là không gian các hàm tuyệt đối liên tục trên $[a,b]$. Kolmogorov và Fomin đã chỉ ra mối liên hệ giữa các hàm tuyệt đối liên tục và các hàm khả tích Lebesgue như sau:

$$f(t) \in AC[a,b] \Leftrightarrow f(t) = c + \int_a^t \varphi(s)ds \quad (\varphi(s) \in L(a,b)).$$

Do đó một hàm tuyệt đối liên tục $f(t)$ có đạo hàm $f'(t) = \varphi(t)$ hầu khắp nơi trên $[a,b]$.

Với $n \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa lớp hàm $AC^n[a,b]$ như sau:

$$AC^n[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, (D^{n-1}f)(t) \in AC[a,b] \quad (D = \frac{d}{dt})\}.$$

Mệnh đề sau đây cho ta một số đặc tính của lớp hàm $AC^n[a,b]$.

Mệnh đề 1.1. *Không gian $AC^n[a,b]$ chứa tất cả các hàm $f(t)$ có dạng như sau:*

$$f(t) = {}_{t_0}I_t^{\alpha}\varphi(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (t-t_0)^k,$$

trong đó $\varphi(t) \in L(a,b), c_k (k = 0,1,\dots,n-1)$ là các hằng số tùy ý và

$${}_{t_0}I_t^{\alpha}\varphi(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^t (t-s)^{n-1}\varphi(s)ds.$$

Ngoài ra, từ các điều kiện trên ta có:

$$\varphi(s) = f^{(n)}(s), c_k = \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(k = 0,1,\dots,n-1).$$

Định lí sau cho ta một tiêu chuẩn cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville.

Định lí 1.2. *Cho $\alpha \geq 0, n = [\alpha]+1$. Nếu $f(t) \in AC^n[a,b]$, khi đó đạo hàm phân thứ ${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} f(t)$ tồn tại hầu khắp nơi trên $[a,b]$ và có thể được biểu diễn dưới dạng sau:*

$${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(t-t_0)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(s)ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}}.$$

Kết quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lí 1.2.

Hệ quả 1.1. *Nếu $0 < \alpha < 1$ và $f(t) \in AC[a,b]$ thì*

$${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}[\frac{f(t_0)}{(t-t_0)^{\alpha}} + \int_{t_0}^t \frac{f'(s)ds}{(t-s)^{\alpha}}].$$